

# 非ホロノミックな拘束を持つ 3自由度マニピュレータの目標軌道の生成と収束制御

吉川 恒夫<sup>\*1</sup> 小林 啓吾<sup>\*2</sup> 渡辺 哲陽<sup>\*1</sup>

## Design of a Desirable Trajectory and Convergent Control for 3-D.O.F Manipulator with a Nonholonomic Constraint

Tsuneo Yoshikawa<sup>\*1</sup>, Keigo Kobayashi<sup>\*2</sup> and Tetsuyo Watanabe<sup>\*1</sup>

This paper is concerned with control of a 3 link planar underactuated manipulator that is known as a second order nonholonomic system. Since we have already proposed a control law that ensures convergence of its state to a desirable trajectory and to any desired final point, we propose a method of design of a desirable trajectory that starts from any given initial point, and then passes any given desired passing point, and finally converges at any given desired final point.

**Key Words:** Underactuated Planar Manipulator, Nonholonomic System, Desirable Trajectory, Exponential Stability

### 1. はじめに

近年、非ホロノミックシステムの研究が注目を集めている。非ホロノミックシステムの中で重要なクラスに1階非ホロノミックシステムと2階非ホロノミックシステムがある。前者は、速度間に関係式を持ち、それを積分して位置座標間の変換できないシステムである。力学における非ホロノミックな拘束を持つ車両系や転がり接触を持つロボットハンド、および角運動量保存則を持つ宇宙ロボットなどがこの系に含まれる。後者は、加速度間に関係式を持ち、それを積分して速度間や位置間の変換できないシステムである。駆動自由度に対して駆動入力が少ない、いわゆる劣駆動システムである非駆動関節を持つマニピュレータ系や船舶、潜水艦などがこの系に含まれる。

これら1階、2階の非ホロノミックシステムの中には、線形近似系が可制御にならず、時不変の状態フィードバックでは安定化できない系がある[1]~[11]。このうち、1階非ホロノミックシステムに対しては、多くの研究者によって可制御性の解析や安定化制御などにおいても多くの成果が得られている[1]~[3]が、2階非ホロノミックシステムに対しては、様々な研究が現在盛んに行われているところではあるが、成果は限られている[4]~[11]。

2階非ホロノミックシステムの一つに非駆動関節を持つ水平面内マニピュレータ系がある[5]~[11]が、この系はその他の

船舶系や潜水艦系と比較すると運動方程式に近似項がなく力学的な解析や検証を行うのに適している。よって、これらの系に対する一般的な研究をするための足がかりとしてまず非駆動関節を持つマニピュレータ系を研究することは有効である。非駆動関節を持つ非ホロノミックなマニピュレータ系として、一つの駆動関節の先に一つの非駆動関節系を連結した系がある。この系に対してはいくつかの閉ループ制御手法が提案されているが[9]~[11]、系の可制御性はいまだ証明されておらず、最終目標点に対する収束が理論的に証明された制御則もまだ提案されていない。これに対して、二つの駆動関節の先に一つの非駆動関節を連結した系は、すでに荒井らによって可制御性が証明されている[6]ので、次は閉ループ制御則を構成することが期待される。De Lucaらはこの系を2階のCaplygin formとして定式化し可制御であるための一つの十分条件を与え、閉ループ制御により任意の姿勢に静止させることができることを示している。しかし、閉ループ制御は扱っていない[5]。荒井らはこの系に対し、任意に与えられた初期状態と最終状態を結ぶ軌道を生成する手法を提案し、その軌道への閉ループ制御を行っている[7]。荒井らの軌道生成法は、初期状態と最終状態から通過点が二つ決まり、それらを直線軌道と回転軌道によって結んでいくものである。しかし、そこでは初期状態が静止状態であることを仮定しており、ゼロでない初期速度を持っている場合には、さらに多くの通過状態を定めるように拡張する必要があり、得られる軌道も複雑なものとなる。また、軌道への追従制御においては最終状態への収束性は保証されておらず、制御終了時に制御誤差が残る可能性がある。特に非駆動関節の回転速度に誤差が残れば大きな問題となる。

一方で筆者らはすでに同じ系に対して、系を2階のチェーン

原稿受付 1999年5月13日

<sup>\*1</sup>京都大学大学院工学研究科

<sup>\*2</sup>大阪大学大学院基礎工学研究科

<sup>\*1</sup>Faculty of Engineering, Kyoto University

<sup>\*2</sup>Graduate School of Engineering Science, Osaka University

ド形式として表現し、閉ループ制御する手法を提案している [8] .  
 そこでは原点へと指数関数的に収束する軌道に対して状態を指数関数的に収束させる手法が用いられており、目標軌道追従と最終的な目標位置への指数関数的な収束が同時に達成されている . この手法では、目標軌道に指数関数という無限時間の長さを持った軌道を用いることによって、最終目標状態に対する定常誤差が残るという問題を回避している . しかし、そこで用いられた目標軌道は限定されており、任意に与えられた初期状態から始まるものではなかった .

そこで本論文では、水平面内において二つの回転駆動関節の先に一つの回転自由関節が存在する 3 自由度マニピュレータに対して、任意の初期状態から、任意に定めた一つの目標通過点を通過したのち、原点へ指数関数的に収束する軌道の生成手法について提案する . この軌道は文献 [8] で提案された閉ループ制御の目標軌道として用いることができるものである . 本論文の構成は以下の通りである . まず 2, 3 章で、文献 [8] で提案した、3 自由度マニピュレータの運動方程式を 2 階のチェインド形式に変換する手法、その 2 階のチェインド形式に対する制御則を示す . 次に 4 章で目標軌道の生成手法について述べる . 最後に 5 章で数値シミュレーションにより本手法の有効性を示す .

## 2. チェインド形式への変換

Fig. 1 のようなマニピュレータを考える . 水平面内での動きを考え、重力は働かないものとする . 関節はすべて回転関節であり、ベース部から順に関節 1, 2, 3 とする . リンクについても、ベース部から順にリンク 1, 2, 3 とする . また、関節 1, 2 は駆動関節、関節 3 は非駆動関節である . 各関節角度を  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と表し、一般化座標を  $q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$  とする .

そして

- $m_i$ : リンク  $i$  の質量
- $\tilde{I}_i$ : リンク  $i$  の重心を通り  $Z$  軸に平行な軸まわりの慣性モーメント
- $l_i$ : リンク  $i$  の長さ
- $l_{gi}$ : 関節  $i$  からリンク  $i$  の重心までの長さ
- $\tau_i$ : 関節  $i$  に働く関節駆動トルク

とし、 $I_i = \tilde{I}_i + m_i l_{gi}^2, C_i = \cos \theta_i, S_i = \sin \theta_i, C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), C_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3), S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), S_{23} =$

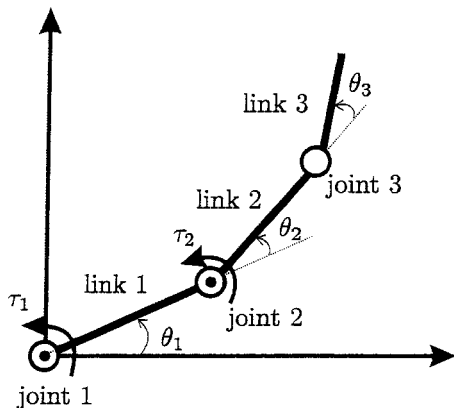


Fig. 1 3 link planar manipulator

$\sin(\theta_2 + \theta_3), C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$  とすると運動方程式は

$$\begin{aligned} \tau_1 = & I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + I_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\ & + (m_2 + m_3)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_3 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2)l_1 \{C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - S_2(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\} \\ & + m_3 l_1 l_{g3} \{C_{23}(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\ & - S_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\} \\ & + m_3 l_2 l_{g3} \{C_3(2\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\ & - S_3(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2)\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + I_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_3 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2)l_1 (C_2 \ddot{\theta}_1 + S_2 \dot{\theta}_1^2) \\ & + m_3 l_1 l_{g3} (C_{23} \ddot{\theta}_1 + S_{23} \dot{\theta}_1^2) \\ & + m_3 l_2 l_{g3} \{C_3(2\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\ & - S_3(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2)\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 0 = & I_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_3 l_1 l_{g3} (C_{23} \ddot{\theta}_1 + S_{23} \dot{\theta}_1^2) \\ & + m_3 l_2 l_{g3} \{C_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + S_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\} \end{aligned} \quad (3)$$

となる . ここで、座標変換

$$\begin{cases} c_x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} + \frac{I_3}{m_3 l_{g3}} C_{123} \\ c_y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} + \frac{I_3}{m_3 l_{g3}} S_{123} \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (4)$$

を用いると、系の方程式は

$$\begin{cases} \ddot{c}_x = \cos \theta v_1 \\ \ddot{c}_y = \sin \theta v_1 \\ \ddot{\theta} = v_2 \end{cases} \quad (5)$$

となる . ここで、 $c_x, c_y, \theta$  は新たな座標であり、 $v_1, v_2$  は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{C_{12}}{S_2 l_1} & \frac{1}{S_2} \left( \frac{C_{12}}{l_1} - \frac{C_1}{l_2} \right) \\ -\frac{S_{12}}{S_2 l_1} & \frac{1}{S_2} \left( \frac{S_{12}}{l_1} - \frac{S_1}{l_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ & = \mathbf{W} \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} \\ S_{123} & C_{123} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 + \frac{I_3}{m_3 l_{g3}} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\ -\frac{I_3}{m_3 l_{g3}} v_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

を満たす新たな入力である . ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \mathbf{W}$  は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -m_3 l_{g3} \cos \theta \dot{\theta}^2 \\ -m_3 l_{g3} \sin \theta \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{C_{12}}{S_2} \left\{ \frac{I_1}{l_1} + m_2 l_2 \left( 1 - \frac{l_{g2}}{l_2} \right) \right\} & -\frac{C_1}{S_2} \left( \frac{I_2}{l_2} - m_2 l_{g2} \right) \\ \frac{S_{12}}{S_2} \left\{ \frac{I_1}{l_1} + m_2 l_2 \left( 1 - \frac{l_{g2}}{l_2} \right) \right\} & -\frac{S_1}{S_2} \left( \frac{I_2}{l_2} - m_2 l_{g2} \right) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{S_2 l_1} \{C_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\} \\ -\frac{1}{S_2 l_2} \{l_1 \dot{\theta}_1^2 + C_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{C_{12}}{S_2} \left\{ \frac{I_1}{l_1} + m_2 l_2 \left( 1 - \frac{l_{g2}}{l_2} \right) \right\} - \frac{C_1}{S_2} \left( \frac{I_2}{l_2} - m_2 l_{g2} \right) \\ \frac{S_{12}}{S_2} \left\{ \frac{I_1}{l_1} + m_2 l_2 \left( 1 - \frac{l_{g2}}{l_2} \right) \right\} - \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{I_2}{l_2} - m_2 l_{g2} \right) \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \frac{C_{12}}{S_2 l_1} & \frac{S_{12}}{S_2 l_1} \\ -\frac{C_1}{S_2 l_2} & -\frac{S_1}{S_2 l_2} \end{bmatrix} \\
w_1 &= m_2 \frac{l_{g2}}{l_2} + m_3 - \frac{m_3^2 l_{g3}^2}{I_3} \sin^2 \theta \\
w_2 &= \frac{m_3^2 l_{g3}^2}{I_3} \sin \theta \cos \theta \\
w_3 &= m_2 \frac{l_{g2}}{l_2} + m_3 - \frac{m_3^2 l_{g3}^2}{I_3} \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

である．なお，新たな座標である  $c_x, c_y$  は撃心 [6] の位置， $\theta$  はリンク 3 と  $x$  方向とのなす角度を表している．また， $v_1, v_2$  は撃心位置に関して  $x$  方向と  $\theta$  の角度をなす方向に働く力，および撃心位置に働くトルクを表している．

つづいて式 (5) に対して

$$\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T = \left[ c_x - \frac{I_3}{m_3 l_{g3}}, \tan \theta, c_y \right]^T \quad (7)$$

なる座標変換および入力変換

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec \theta u_1 \\ \cos^2 \theta u_2 - 2 \tan \theta \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

を用いると

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = u_1 \\ \ddot{\xi}_2 = u_2 \\ \ddot{\xi}_3 = \xi_2 u_1 \end{cases} \quad (9)$$

を得る．式 (9) を 2 階のチェインド形式と呼ぶ．なお，式 (7) において  $\xi = [c_x, \tan \theta, c_y]^T$  としても式 (9) が導かれる．このとき  $[\xi_1, \xi_3]$  が撃心の位置に， $\xi_2$  がリンク 3 と  $x$  方向とのなす角の正接に対応する．しかし， $\xi = 0$  のときにリンク 3 の根本位置が原点，リンク 3 と  $x$  方向とのなす角が 0 になるように，式 (7) の  $\xi_1$  には  $c_x$  からリンクの根本と撃心の間の距離である  $I_3/m_3 l_{g3}$  を引いた値を使っている（この操作は後に示す数値例においてリンク 3 の収束（目標）位置姿勢を分かりやすくするためのものである）．なお，同様の座標変換により  $\xi = 0$  を任意の静止状態に対応させることができる [8]．これにより系を任意の静止状態へと制御する問題は  $\xi$  を 0 にする問題に置き換えられる．

### 3. 制 御 則

筆者ら [8] は先に，式 (9) で表されるシステムを原点に指数安定化する制御則を提案している．この章ではこの制御則を要点をまとめて紹介する．

次の制御入力を考える．

$$\begin{cases} u_1 = \ddot{r}_1(t) - k_1(t)(\dot{\xi}_1 - \dot{r}_1(t)) \\ \quad - k_2(t)(\xi_1 - r_1(t)) \\ u_2 = \ddot{r}_2(t) - k_3(t)(\dot{\xi}_2 - \dot{r}_2(t)) \\ \quad - k_4(t)(\xi_2 - r_2(t)) \\ \quad - \frac{k_5(t)(\dot{\xi}_3 - \dot{r}_3(t))}{\ddot{r}_1(t)} - \frac{k_6(t)(\xi_3 - r_3(t))}{\ddot{r}_1(t)} \end{cases} \quad (10)$$

ここで， $k_i(t)$  は行列

$$\Lambda_{1j} = \begin{bmatrix} \lambda_j - \kappa_{1j} & -\kappa_{2j} \\ 1 & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (11)$$

および

$$\tilde{\Lambda}_j = \begin{bmatrix} -\kappa_{3j} & -\kappa_{4j} & -\kappa_{5j} & -\kappa_{6j} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (12)$$

が安定になるように定めた定数  $\kappa_{ij}$  を用いて

$$k_i(t) = \kappa_{ij} \quad (t_j \leq t < t_{j+1}) \quad (13)$$

と定めるものとする．

また， $r_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は過渡応答を指定するための  $\xi_i(t)$  の目標軌道であり，以下の条件 (i) ~ (v) を満足する．

- (i)  $\ddot{r}_1(t), \ddot{r}_2(t)$  が有界．
- (ii)  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = \infty$  を満足する  $m$  個 ( $m \geq 0$ ) の時刻  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) に対し，

$$\ddot{r}_1(t) = a_j e^{-\lambda_j(t-t_j)} \quad (t_j \leq t < t_{j+1})$$

を満足する．ここで  $\lambda_j \geq 0$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ )， $\lambda_m > 0$  とする．

- (iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = 0$
- (iv)  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) e^{(\epsilon_i + (i-2)\lambda_m)t} = 0$  を満足する正定数  $\epsilon_i$  ( $i = 2, 3$ ) が存在する．
- (v)  $\ddot{r}_3(t) = r_2(t)\ddot{r}_1(t)$  を満足する．

なお，条件 (ii) (iii) (iv) より  $r_i(t)$  は指数関数的に収束する軌道となる．

このとき次の定理が成立する [8]．

《〈定理 1〉》

式 (9) で表されるシステムに対し，条件 (i) ~ (v) を満足する目標軌道  $r(t) = [r_1(t), r_2(t), r_3(t)]^T$  が与えられているとする．このとき，システムの状態変数を  $x = [x_1^T, x_2^T, x_3^T]^T$ ， $x_i = [\dot{\xi}_i(t), \xi_i(t)]^T$  ( $i = 1, 2, 3$ )，状態と目標軌道の誤差を  $e = [e_1^T, e_2^T, e_3^T]^T$ ， $e_i = [\dot{\xi}_i(t) - \dot{r}_i(t), \xi_i(t) - r_i(t)]^T$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とおいて，このシステムに式 (10) の制御則を適用すると，

$$\|e(t)\| \leq \phi(\|e(0)\|) e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0) \quad (14)$$

を満足する， $\phi(0) = 0$  を満たす微分可能な単調増加関数  $\phi$  と正定数  $\alpha$  が存在する．

定理 1 は目標軌道と実際の初期状態に誤差があったとしても，状態は軌道に収束していき，軌道とともに原点に収束することを保証する．しかし，文献 [8] では  $r_1(t)$  の軌道のみを陽に与え， $r_2(t) = r_3(t) = 0$  としていた．そこで次章以降で  $r_2(t)$ ， $r_3(t)$  を含む軌道生成問題を扱う．

#### 4. 目標軌道

本章では次の問題を考える。

[問題 1] 式(9)で表されるシステムに対し, 初期状態  $[\dot{\xi}_{d1}(0), \xi_{d1}(0)]^T$  ( $i = 1, 2, 3$ ) および, 任意の目標通過時刻  $t_d$  と目標通過状態  $[\dot{\xi}_{d1}(t_d), \xi_{d1}(t_d)]^T$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\dot{\xi}_{d1}(t_d) = 0$  が与えられたものとする。このとき, 条件 (i) ~ (v) を満たす目標軌道  $r_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を求めよ。

$\dot{r}_1(t_d) = 0$  より,  $\dot{\xi}_1(t_d)$  は多くの場合  $\dot{\xi}_1$  方向の進行方向が変わる切り返し点となる。文献[8]においても, 目標時刻  $t_d$  と目標通過位置  $\xi_{d1}(t_d)$  を与えているが,  $\dot{\xi}_{d1}(t_d) \neq 0$  であったために  $\xi_{d1}(t_d)$  が実際の切り返し点に対応しておらず, 直感的に分かりにくかった。また, 荒井ら[6][7]の目標軌道に比べると, この目標軌道の良い点は, 初期状態が静止しているかどうかにかかわらず, 目標通過点が1箇所であることと, その目標通過点を自由に設定できることである。

以下で具体的に軌道を生成する。

まず  $r_1(t)$  についてについて求める。条件 (i) ~ (iii) を満たすように定数  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\ddot{r}_1(t) = \begin{cases} a_0 & (0 \leq t < t_1) \\ a_1 & (t_1 \leq t < t_2) \\ a_2 & (t_2 \leq t < t_3) \\ a_3 \exp(-\lambda(t - t_3)) & (t_3 < t) \end{cases} \quad (15)$$

とする。ここで, 時刻については

$$\begin{cases} t_1 = \frac{t_d}{2} \\ t_2 = t_d \\ t_3 = t_d + \frac{2(\xi_{d1}(t_d) - h)}{\lambda h} \end{cases} \quad (16)$$

とする。定数  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) は時刻  $t_1, t_2, t_3$  における境界条件より, 以下のよう定める。

$$\begin{cases} a_0 = \frac{4\xi_{d1}(t_d) - 3t_2\dot{\xi}_{d1}(0) - 4\xi_{d1}(0)}{t_d^2} \\ a_1 = -\frac{4\xi_{d1}(t_d) - t_2\dot{\xi}_{d1}(0) - 4\xi_{d1}(0)}{t_d^2} \\ a_2 = -\frac{\lambda^2 h^2}{2(\xi_{d1}(t_d) - h)} \\ a_3 = \lambda^2 h \end{cases} \quad (17)$$

なお,  $h = k\xi_{d1}(t_d)$  ( $0 < k < 1$ ) は  $r_1(t_3) = h$  を満足する設計パラメータである。この  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を用いて式(15)を積分すると,  $r_1(t)$  は次式で与えられる。

$$r_1(t) = \begin{cases} \frac{a_0}{2}t^2 + \dot{\xi}_{d1}(0)t + \xi_{d1}(0) & (0 \leq t < t_1) \\ \frac{a_1}{2}(t - t_2)^2 + \xi_{d1}(t_d) & (t_1 \leq t < t_2) \\ \frac{a_2}{2}(t - t_2)^2 + \xi_{d1}(t_d) & (t_2 \leq t < t_3) \\ h \exp(-\lambda(t - t_3)) & (t_3 < t) \end{cases} \quad (18)$$

式(10)の制御則では, 分母に  $\dot{r}_1(t)$  が入っているため,  $\xi_1(t)$  の目標軌道  $r_1(t)$  は,  $\|\xi_1(t)\|$  の値が ( $\|\xi_1(0)\|$  に対して)

小さいときでも,  $\dot{r}_1(t)$  が大きな値を持つように定める必要がある。式(18)のように  $r_1(t)$  を定めることにより,  $\xi_1(0) = 0$  のときにも, いったん  $\xi_1(t_d) = \xi_{d1}(t_d)$  の位置まで離れてから原点に収束するという実用的な軌道を得ることができる。

次に  $r_2(t)$  と  $r_3(t)$  について求める。式(15)より  $\ddot{r}_1(t) \neq 0$  が成り立つ。このとき,  $\xi_1, \xi_3$  を(仮想的な)出力とみなすと, すべての状態および入力  $[\xi, \dot{\xi}, u]$  が,  $\xi_1^{(i)}, \xi_3^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) の関数となる。このような性質を flatness と呼ぶ[12]。具体的には式(9), 条件(ii)より各区間  $t_j \leq t < t_{j+1}$  において

$$r_2(t) = \frac{\ddot{r}_3(t)}{\ddot{r}_1(t)} \quad (19)$$

$$\dot{r}_2(t) = \frac{(r_3^{(3)}(t) + \lambda_j \dot{r}_3(t))}{\ddot{r}_1(t)} \quad (20)$$

が成り立つ。この flatness の性質より, 条件(iv)(v)を満たす軌道の生成は, 各区間 ( $t_j \leq t < t_{j+1}$ ) ごとに3階微分可能な関数  $r_3(t)$  を構成する問題に帰着できる。以下では区間 ( $0 \leq t < t_2$ ) と区間 ( $t_2 \leq t$ ) とに分けて  $r_3(t)$  の軌道を求める。

まず, 区間 ( $0 \leq t < t_2$ ) では,  $r_3(t)$  を時間多項式として

$$r_3 = \begin{cases} \sum_{k=0}^5 A_k (t - t_1)^k & (t < t_1) \\ \sum_{k=0}^5 B_k (t - t_1)^k & (t_1 \leq t < t_2) \end{cases} \quad (21)$$

とする。ここで, 5次の時間多項式を用いるのは初期状態, 目標通過状態での境界条件が満足され, 時刻  $t_1$  で  $r_2, r_3, \dot{r}_2, \dot{r}_3$  が連続となるようにするためである。表記を簡潔にするため

$$\begin{cases} \gamma = a_1(20\xi_{d3}(0) + 14\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + 4a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{2}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3) + a_0(20\xi_{d3}(t_2) - 14\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 + 4a_1\xi_{d2}(t_2)t_1^2 - \frac{1}{2}a_1\dot{\xi}_{d2}(t_2)t_1^3) \\ \delta = a_0(10\xi_{d3}(0) + 6\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + 1.5a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3) - a_1(10\xi_{d3}(t_2) + 6\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 - 1.5a_1\xi_{d2}(t_2)t_1^2 + \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3) \\ \Delta = 20(a_0^2 + a_1^2) + 280a_0a_1 \end{cases}$$

とおくと, 係数  $A_k, B_k$  は

$$\begin{cases} A_0 = (4\gamma(a_0 + a_1) + 6\delta(a_0 - a_1))/\Delta \\ A_1 = (-10\gamma(a_0 - a_1) - 20\delta(a_0 + a_1))/\Delta \\ A_2 = 10\xi_{d3}(0) + 6\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + 1.5a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3 + 4A_1t_1 - 10A_0 \\ A_3 = 20\xi_{d3}(0) + 14\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + 4a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{2}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3 + 6A_1t_1 - 20A_0 \\ A_4 = 15\xi_{d3}(0) + 11\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + 3.5a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{2}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3 + 4A_1t_1 - 15A_0 \\ A_5 = 4\xi_{d3}(0) + 3\dot{\xi}_{d3}(0)t_1 + a_0\xi_{d2}(0)t_1^2 + \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(0)t_1^3 + A_1t_1 - A_0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = A_0 \\ B_1 = A_1 \\ B_2 = 10\xi_{d3}(t_2) - 6\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 + 1.5a_0\xi_{d2}(t_2)t_1^2 \\ \quad - \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(t_2)t_1^3 - 4A_1t_1 - 10A_0 \\ B_3 = -20\xi_{d3}(t_2) + 14\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 - 4a_0\xi_{d2}(t_2)t_1^2 \\ \quad + \frac{1}{2}a_0\dot{\xi}_{d2}(t_2)t_1^3 + 6A_1t_1 + 20A_0 \\ B_4 = 15\xi_{d3}(t_2) - 11\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 + 3.5a_0\xi_{d2}(t_2)t_1^2 \\ \quad - \frac{1}{2}a_0\dot{\xi}_{d2}(t_2)t_1^3 - 4A_1t_1 - 15A_0 \\ B_5 = -4\xi_{d3}(t_2) + 3\dot{\xi}_{d3}(t_2)t_1 - a_0\xi_{d2}(t_2)t_1^2 \\ \quad + \frac{1}{6}a_0\dot{\xi}_{d2}(t_2)t_1^3 + A_1t_1 + A_0 \end{array} \right.$$

となる。

次に区間 ( $t_2 \leq t$ ) を考える。この区間は指数関数を用いる。 $\alpha > 2\lambda$  を満たす  $\alpha$  を用いて、区間 ( $t_2 \leq t < t_3$ ) では

$$\begin{aligned} r_3(t) = & e^{-\alpha(t-t_2)} \\ & \times \left\{ \xi_{d3}(t_2) \left( 1 + \alpha(t-t_2) \right. \right. \\ & + \frac{1}{2!}\alpha^2(t-t_2)^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3(t-t_2)^3 \Big) \\ & + \dot{\xi}_{d3}(t_2) \left( 1 + \alpha(t-t_2) + \frac{1}{2!}\alpha^2(t-t_2)^2 \right) (t-t_2) \\ & + \ddot{r}_3(t_2)(1 + \alpha(t-t_2))\frac{1}{2!}(t-t_2)^2 \\ & \left. + r_3^{(3)}(t_2)\frac{1}{3!}(t-t_2)^3 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

とする。ここで、 $\ddot{r}_3(t_2), r_3^{(3)}(t_2)$  は式 (15) (19) (20),  $\xi_{d2}(t_d), \dot{\xi}_{d2}(t_d)$  より求める。同様に区間 ( $t_3 \leq t$ ) では

$$\begin{aligned} r_3(t) = & e^{-\alpha(t-t_3)} \\ & \times \left\{ r_3(t_3) \left( 1 + \alpha(t-t_3) \right. \right. \\ & + \frac{1}{2!}\alpha^2(t-t_3)^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3(t-t_3)^3 \Big) \\ & + \dot{r}_3(t_3) \left( 1 + \alpha(t-t_3) + \frac{1}{2!}\alpha^2(t-t_3)^2 \right) (t-t_3) \\ & + \ddot{r}_3(t_3)(1 + \alpha(t-t_3))\frac{1}{2!}(t-t_3)^2 \\ & \left. + r_3^{(3)}(t_3)\frac{1}{3!}(t-t_3)^3 \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

とする。ここで、 $r_3(t_3), \dot{r}_3(t_3), \ddot{r}_3(t_3), r_3^{(3)}(t_3)$  は、時刻  $t_3$  で  $r_2, r_3, \dot{r}_2, \dot{r}_3$  が連続となるように、式 (15) (19) (20) (22) より求める。

以上をまとめると、問題 1 の解は以下ようになる。

1.  $r_1(t)$  を式 (17) (18) から求める。
2. 区間 ( $0 \leq t < t_2$ ) での  $r_3(t)$  を式 (21) から求め、区間 ( $t_2 \leq t$ ) での  $r_3(t)$  を式 (22) (23) から求める。
3.  $r_2(t)$  を式 (19) (20) より求める。

このようにして求めた  $r_i(t)$  は、 $r_i(0) = \xi_{di}(0), r_i(t_d) = \xi_{di}(t_d)$ , 条件 (i) ~ (v) を満足する。

### 5. 数 値 例

前章までに示してきた手法の有効性を確認するため数値計算を行った。各種パラメータの値は、 $l_1 = l_2 = 1, l_3 =$

$0.5, l_{g1} = l_{g2} = 0.5, l_{g3} = 0.25, m_i = 1, I_1 = I_2 = 1/3, I_3 = 0.25/3$  とした。初期値を  $[\xi_{d1}(0), \xi_{d2}(0), \xi_{d3}(0)]^T = [0, 0, 1]^T$ ,  $[\dot{\xi}_{d1}(0), \dot{\xi}_{d2}(0), \dot{\xi}_{d3}(0)]^T = [0.1, 0, 0]^T$ , 切り返し点における値を  $[\xi_{d1}(t_d), \xi_{d2}(t_d), \xi_{d3}(t_d)]^T = [2, 0, 0.5]^T$ ,  $[\dot{\xi}_{d1}(t_d), \dot{\xi}_{d2}(t_d), \dot{\xi}_{d3}(t_d)]^T = [0, 2, 0]^T$ , 切り返し点時刻を 1, また、 $\lambda = 0.8, \alpha = 2.5, h = 1.5$  とした。

得られた軌道を Fig. 2~4 に示す。Fig. 2 は状態  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の時間軌道, Fig. 3 は軌道を実現するための入力  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) の応答, Fig. 4 はリンク 3 の時間による推移を表したものである。ただし、Fig. 4 における白丸, 黒丸はそれぞれ各時刻におけるリンク 3 の根本, 先端を表す。Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4 より、目標位置, 姿勢(原点)に収束しているのが分かる。

次に軌道に対する安定性を見るため、得られた目標軌道に対して誤差を含む初期値  $[\xi_1(0), \xi_2(0), \xi_3(0)]^T = [0.1, 0, 1.1]^T$ ,  $[\dot{\xi}_1(0), \dot{\xi}_2(0), \dot{\xi}_3(0)]^T = [0, 0, 0]^T$  を与え、数値シミュレーションを行った。フィードバックゲインは、 $k_1(t) = 4, k_2(t) = 5$ ,

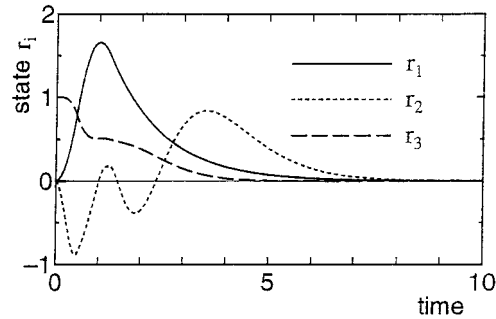


Fig. 2 Trajectory  $r_i$

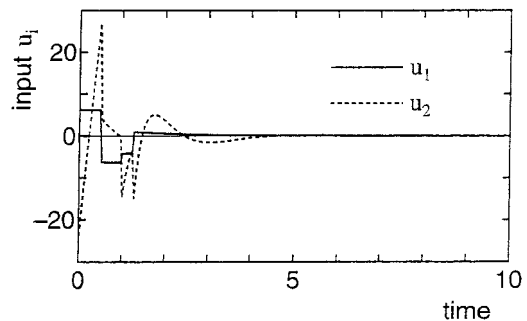


Fig. 3 Input

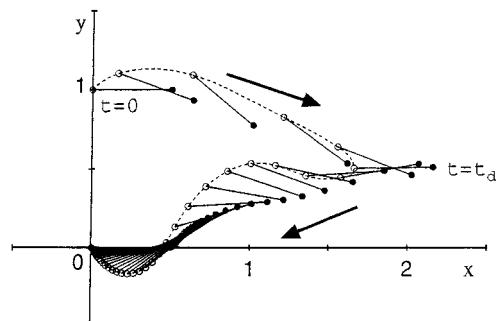


Fig. 4 Trajectory of link3

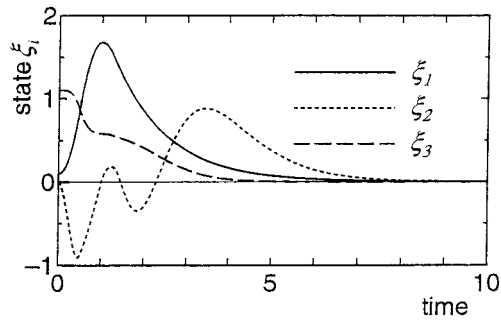
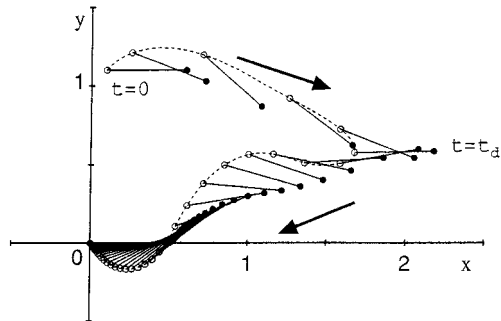
Fig. 5 Response of  $\xi_i$ 

Fig. 6 Trajectory of link3 with initial error

$t < t_3$  では,  $[k_3(t), k_4(t), k_5(t), k_6(t)] = [8, 29, 52, 40]$ ,  $t > t_3$  では,  $[k_3(t), k_4(t), k_5(t), k_6(t)] = [9, 38, 88, 74]$  と  $\tilde{A}_{1j}, \tilde{A}_j$  の極配置から定めた. 結果を Fig. 5, 6 に示す. Fig. 5 は状態  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の応答, Fig. 6 はリンク 3 の時間による推移を表したものである. Fig. 5, 6 から初期誤差が存在する場合も軌道に追従しつつ, 最終的に原点に収束しているのが分かる.

## 6. おわりに

本報告では, 非ホロノミックな拘束を持つ水平面内で動作する 3 自由度マニピュレータについて, 任意の初期状態から出発し, 任意に指定した中間点を通り, 原点に収束する目標軌道の生成手法を提案した. この手法は先に筆者らが提案した制御理論 [8] を合わせることで, 状態を目標軌道に追従させつつ, 最終的に原点に収束させることができるものである. さらに,

数値シミュレーションを行い, この手法の有効性を確認した.

## 参考文献

- [1] 中村: “講座 非ホロノミックロボットシステム (第 1 回 ~ 第 4 回)”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.4, pp.521-528, no.5, pp.655-662, no.6, pp.837-844, no.7, pp.999-1005, 1993.
- [2] 三平: “ノンホロノミックシステム—その本質的非線形性と制御—”, SICE 関西支部創立 30 周年記念シンポジウム「先端制御理論とその応用」資料, pp.25-30, 1996.
- [3] 井村, 小林, 吉川: “非ホロノミックチェインドシステムの過渡応答を考慮した指数安定化”, 計測自動制御学会論文集, vol.33, no.5, pp.375-383, 1997.
- [4] G. Oriolo and Y. Nakamura: “Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints,” IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems IROS '91, IEEE Cat. no.91TH0375-6, pp.1248-1253, 1991.
- [5] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: “Dynamic Mobility of Redundant Robots using End-Effector Commands,” Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, pp.1760-1767, 1996.
- [6] 荒井: “非駆動関節を有する 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性”, 日本ロボット学会誌, vol.14, no.5, pp.751-758, 1996.
- [7] 荒井, 谷江, 城間: “非駆動関節を有する水平 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下におけるフィードバック制御”, 日本ロボット学会誌, vol.15, no.6, pp.943-952, 1997.
- [8] 小林, 井村, 吉川: “自由関節を含む 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック制御”, 計測自動制御学会論文集, vol.33, no.8, pp.799-804, 1997.
- [9] H. Arai, K. Tanie and N. Shiroma: “Time-scaling Control of an Underactuated Manipulator,” Proceeding of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, pp.2619-2626, 1998.
- [10] 中村, 濃沼, 鈴木: “自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御—ドリフト項を持つ非ホロノミック機械の制御—”, 日本ロボット学会誌, vol.14, no.4, pp.602-611, 1996.
- [11] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: “Stabilization of Underactuated Robots: Theory and Experiments for a Planar 2R Manipulator,” Proceeding of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, pp.3274-3280, 1997.
- [12] M. Fliess, J. Levine, P. Martin and P. Rouchon: “Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat system,” Proceedings of 3rd European Control Conference, pp.1882-1887, 1995.



吉川恒夫 (Tsuneo Yoshikawa)

1941 年 12 月 19 日生. 1969 年京都大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年同大学工学部助手. 1970 年同大学工学部助教授. 1986 年同大学工学部教授 (オートメーション研究施設), 1994 年組織変更により同大学工学研究科教授 (機械工学専攻) となり, 現在に至る. ロボット工学, 制御工学の研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会, 日本機械学会, システム制御情報学会, IEEE などの会員. (日本ロボット学会正会員)



小林啓吾 (Keigo Kobayashi)

1971 年 5 月 10 日生. 1996 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 1999 年同大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年大阪大学大学院基礎工学研究科助手, 現在に至る. 非ホロノミックシステムの制御の研究に従事. 博士 (工学). (日本ロボット学会正会員)



渡辺哲陽 (Tetsuyo Watanabe)

1974 年 4 月 3 日生. 1999 年, 京都大学工学研究科修士課程修了, 同年同大学大学院工学研究科博士課程に進学, 現在に至る. 非ホロノミックな拘束をもつロボットシステムなどに興味を持つ. (日本ロボット学会学生会員)